Análisis Sintáctico

CI4721 – Lenguajes de Programación II

Ernesto Hernández-Novich
<emhn@usb.ve>

Universidad "Simón Bolívar"

Definición

Una *Gramática Libre de Contexto (CFG)* G se define como

$$G = (N, \Sigma, P, S)$$

- N es el conjunto de símbolos *no terminales* o *variables*.
- Σ es el conjunto de símbolos *terminales* o *alfabeto*.
- $P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$ es el conjunto de *producciones*.
  - Lado izquierdo – un no terminal.
  - Lado derecho – secuencia, posiblemente vacía, de símbolos cualesquiera.
- $S \in N$ es el *símbolo inicial* para generación de frases.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Notación y nomenclatura a usar

Notación y nomenclatura habituales cuando se trabaja con gramáticas

- No terminales como letras mayúsculas, i.e. $A, B, C, \cdots \in N$
- Terminales como letras minúsculas al comienzo del alfabeto latino, en ocasiones enfatizadas, i.e. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots \in \Sigma$
- Secuencias arbitrarias de símbolos, también llamadas *formas sentenciales*, como letras griegas, i.e. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in (N \cup \Sigma)^*$
- Palabras generadas por la gramática como letras minúsculas desde el final del alfabeto latino, rara vez enfatizadas, i.e. $w, x, y, z \in \Sigma^*$

¿Cómo generan palabras?

Dada $G = (N, \Sigma, P, S)$ se puede **derivar**

$$\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta$$

siempre y cuando

$$\exists A \in N \land \exists \alpha_0, \alpha_1, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*$$

tales que

$$\alpha = \alpha_0 A \alpha_1$$
$$\beta = \alpha_0 \gamma \alpha_1$$
$$A \to \gamma \in P$$

El **lenguaje** de G será

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w\}$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Expresiones aritméticas

Sea la gramática

$$G = (\{E, T, F\}, \{+, *, \mathbf{a}, (,)\}, P, E)$$

con producciones P

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow E{+}T \\
E &\rightarrow T \\
T &\rightarrow T{*}F \\
T &\rightarrow F \\
F &\rightarrow \mathbf{a} \\
F &\rightarrow (E)
\end{aligned}$$

podemos derivar $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$

Expresiones aritméticas

Sea la gramática

$$G = (\{E, T, F\}, \{+, *, \mathbf{a}, (,)\}, P, E)$$

con producciones P

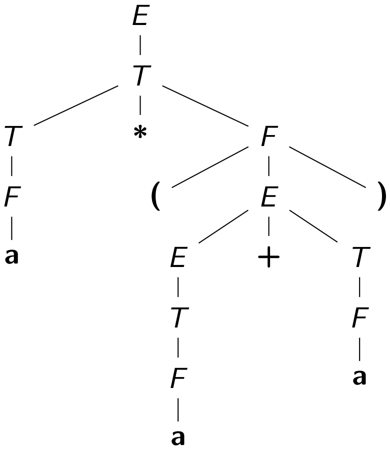
$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E+T\\
E &\rightarrow T\\
T &\rightarrow T*F\\
T &\rightarrow F\\
F &\rightarrow \mathbf{a}\\
F &\rightarrow (E)
\end{aligned}
$$

podemos derivar $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow T\\
&\Rightarrow T*F\\
&\Rightarrow F*F\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*F\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(E)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(E+T)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(T+T)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(F+T)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(\mathbf{a}+T)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(\mathbf{a}+F)\\
&\Rightarrow \mathbf{a}*(\mathbf{a}+\mathbf{a})
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Arbol de Derivación



Puede construirse de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba.

Problema del Análisis Sintáctico

$$G = (N, \Sigma, P, S) \wedge w \in \Sigma^*,$$
$$¿w \in L(G)?$$

Problema del Análisis Sintáctico

$$G = (N, \Sigma, P, S) \wedge w \in \Sigma^*,$$
$$¿w \in L(G)?$$

El mecanismo para contestar esta pregunta debe

- Proveer una derivación para w en G.
- Ser preferiblemente determinístico.
- Ser eficiente en espacio y tiempo.

Encontraremos la máquina más general que provea la derivación, luego agregaremos restricciones sobre G para cumplir los otros dos puntos.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Definición

Un *Autómata de Pila Extendido (PDA) M* se define como

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

- Q es el conjunto finito de *estados*.
- Σ es el conjunto de símbolos en el *alfabeto de entrada*.
- Γ es el conjunto de símbolos en el *alfabeto de pila*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de *estados finales*.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^*)$ es la *función de transición*.
  - Dominio – estado de la máquina y entrada por procesar.
  - Rango – representa el conjunto de movimientos posibles.
  - No determinístico en general – nos interesan determinísticos.

¿Cómo operan y qué aceptan?

Una **configuración instantánea** de $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ será

$$[q, w, \alpha] \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

y definimos una **transición** como

$$[q, w, \alpha] \underset{M}{\vdash} [q', w', \alpha']$$

si y sólo si

$$\exists \mathbf{a} \in (\Sigma \cup \{\lambda\}) \wedge \exists \beta, \beta', \gamma \in \Gamma^*$$

$$w = \mathbf{a}w'$$
$$\alpha = \beta\gamma$$
$$\alpha' = \beta'\gamma$$
$$(q', \beta') \in \delta(q, \mathbf{a}, \beta)$$

El **lenguaje** de M será

$$L(M) = \{w \in \Sigma^*, q \in F : [q_0, w, \lambda] \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} [q, \lambda, \lambda]\}$$

Equivalencia entre generación y aceptación

Reconocedor descendente

Sea $G = (N, \Sigma, P, S)$ una CFG cualquiera. Entonces el PDA extendido

$$Desc(G) = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$$

con δ definida según

$$\delta(q_0, \lambda, \lambda) = \{(q_1, S)\} \tag{1}$$

$$\delta(q_1, \lambda, A) = \{A \to \alpha \in P : (q_1, \alpha)\}, \forall A \in N \tag{2}$$

$$\delta(q_1, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \{(q_1, \lambda)\}, \forall \mathbf{a} \in \Sigma \tag{3}$$

1. Inicialización – símbolo inicial a tope de pila.
2. Expansión – sustituir un no terminal por su lado derecho.
3. Lectura – consumir terminal de entrada correspondiente en pila.

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de construcción

Para la gramática ...

$$E \rightarrow E{+}T$$
$$E \rightarrow T$$
$$T \rightarrow T{*}F$$
$$T \rightarrow F$$
$$F \rightarrow \mathbf{a}$$
$$F \rightarrow (E)$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de construcción

... resulta el PDA no determinístico

Para la gramática ...

$$E \to E{+}T$$
$$E \to T$$
$$T \to T{*}F$$
$$T \to F$$
$$F \to \mathbf{a}$$
$$F \to (E)$$

$$\delta(q_0, \lambda, \lambda) = \{(q_1, E)\}$$
$$\delta(q_1, \lambda, E) = \{(q_1, E{+}T), (q_1, T)\}$$
$$\delta(q_1, \lambda, T) = \{(q_1, T{*}F), (q_1, F)\}$$
$$\delta(q_1, \lambda, F) = \{(q_1, \mathbf{a}), (q_1, (E))\}$$
$$\delta(q_1, +, +) = \{(q_1, \lambda)\}$$
$$\delta(q_1, *, *) = \{(q_1, \lambda)\}$$
$$\delta(q_1, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \{(q_1, \lambda)\}$$
$$\delta(q_1, (, () = \{(q_1, \lambda)\}$$
$$\delta(q_1,),)) = \{(q_1, \lambda)\}$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda]$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{ll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$\begin{array}{lcl} [q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\ [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] \end{array}$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T * F] & &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lcll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & & &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lclc}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & & &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & & &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lcll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & & &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & & &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lcll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), T)] & & &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lclc}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a}), F)] &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] \quad \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a}), F)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), \mathbf{a})] & &
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] \quad \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a}), F)] \quad \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), \mathbf{a})] & \vdash & [q_1,),)]
\end{array}
$$

PDA Descendiente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Desc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), E] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), T{*}F] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F{*}F] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{*}F] & \vdash & [q_1, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), *F] & \vdash \\
[q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash & [q_1, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), (E)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), E{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), T{+}T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), F{+}T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}{+}T)] & \vdash & [q_1, +\mathbf{a}), +T)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), T)] & \vdash & [q_1, \mathbf{a}), F)] & \vdash \\
[q_1, \mathbf{a}), \mathbf{a})] & \vdash & [q_1,),)] & \\
 & \vdash & [q_1, \lambda, \lambda] \ \surd &
\end{array}
$$

Son equivalentes

$$L(Desc(G)) = L(G)$$

Hay que probar la igualdad de ambos conjuntos

- Toda palabra aceptada por $Desc(G)$ es derivable en G

$$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$$

- Toda palabra derivable en G es aceptada por $Desc(G)$

$$L(G) \subseteq L(Desc(G)$$

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

Un Lema auxiliar

Lemma

$$\forall n \in \mathbb{N}, [q_1, w, \alpha] \underset{Desc(G)}{\overset{n}{\vdash}} [q_1, w', \alpha']$$

entonces

$$\exists x \in \Sigma^*, w = xw' \wedge \alpha \underset{G}{\overset{n-|x|}{\Longrightarrow}} x\alpha'$$

- La derivación siempre es por izquierda.
- Pueden demostrarlo por inducción como ejercicio – inducción.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.
2. $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Por definición de operación de $Desc(G)$.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.
2. $[q_0, w, \lambda] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Por definición de operación de $Desc(G)$.
3. $[q_1, w, S] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Porque hay una sola posibilidad para el primer paso.

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.
2. $[q_0, w, \lambda] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Por definición de operación de $Desc(G)$.
3. $[q_1, w, S] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Porque hay una sola posibilidad para el primer paso.
4. $\exists x \in \Sigma^*, w = x \wedge S \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} x$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it…

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.
2. $[q_0, w, \lambda] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Por definición de operación de $Desc(G)$.
3. $[q_1, w, S] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Porque hay una sola posibilidad para el primer paso.
4. $\exists x \in \Sigma^*, w = x \wedge S \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} x$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...
5. $S \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$
   Duh!

$L(Desc(G)) \subseteq L(G)$

La demostración

1. $w \in L(Desc(G))$
   Partimos de una palabra *cualquiera* aceptada por $Desc(G)$.
2. $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Por definición de operación de $Desc(G)$.
3. $[q_1, w, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Porque hay una sola posibilidad para el primer paso.
4. $\exists x \in \Sigma^*, w = x \wedge S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...
5. $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$
   Duh!
6. $w \in L(G)$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

Un Lema auxiliar

Lemma

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \overset{n}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha'$$

entonces

$$\forall x \in \Sigma^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \alpha' = x\beta \wedge [q_1, x, \alpha] \overset{n+|x|}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \beta]$$

- La derivación siempre es por izquierda.
- Pueden demostrarlo por inducción como ejercicio – inducción.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.
2. $S \xRightarrow[G]{*} w$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.
2. $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, w = x\beta \wedge [q_1, xy, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, y, \beta]$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.
2. $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, w = x\beta \wedge [q_1, xy, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, y, \beta]$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...
4. $[q_1, w, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Instanciando $x, y, \beta := w, \lambda, \lambda$

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.
2. $S \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, w = x\beta \wedge [q_1, xy, S] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, y, \beta]$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...
4. $[q_1, w, S] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Instanciando $x, y, \beta := w, \lambda, \lambda$
5. $[q_0, w, \lambda] \underset{Desc(G)}{\overset{*}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Agregando la transición de inicialización de $Desc(G)$.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

$L(G) \subseteq L(Desc(G))$

La demostración

1. $w \in L(G)$
   Partimos de una palabra *cualquiera* derivable en G.
2. $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$
   Por definición de Lenguaje Generado por una Gramática.
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, w = x\beta \wedge [q_1, xy, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, y, \beta]$
   Esta es la aplicación del Lema – when you see it...
4. $[q_1, w, S] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Instanciando $x, y, \beta := w, \lambda, \lambda$
5. $[q_0, w, \lambda] \overset{*}{\underset{Desc(G)}{\vdash}} [q_1, \lambda, \lambda]$
   Agregando la transición de inicialización de $Desc(G)$.
6. $w \in L(Desc(G))$
   Por definición de Lenguaje Aceptado por un PDA.

Equivalencia entre generación y aceptación

Reconocedor ascendente

Sea $G = (N, \Sigma, P, S)$ una CFG cualquiera. Entonces el PDA extendido

$$Asc(G) = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$$

con δ definida según

$$\delta(q_0, \mathbf{a}, \lambda) = \{(q_0, \mathbf{a})\}, \forall \mathbf{a} \in \Sigma \quad (1)$$

$$\delta(q_0, \lambda, \alpha) = \{A \to \alpha^R \in P : (q_0, A)\}, \forall A \in N \wedge \alpha \neq S \quad (2)$$

$$\delta(q_0, \lambda, S) = \{(q_1, \lambda)\} \cup \{A \to S \in P : (q_0, A)\} \quad (3)$$

1. *Shift* – consumir terminal de entrada hacia la pila.
2. *Reduce* – sustituir en pila un lado derecho por su no terminal.
3. Aceptación/Inicialización.

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda]$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$\begin{aligned} &[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] \quad \vdash \\ &[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] \end{aligned}$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$\begin{array}{lcl} [q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\ [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] \end{array}$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$\begin{array}{lll} [q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\ [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] \quad \vdash \\ [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & & \end{array}$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] \quad \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T]
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] &
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$\begin{array}{lclc}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & & &
\end{array}$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{lcll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] & \vdash \\
[q_0, \lambda,)E(*T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] & \vdash \\
[q_0, \lambda,)E(*T] & \vdash & [q_0, \lambda, F{*}T] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] & \vdash \\
[q_0, \lambda,)E(*T] & \vdash & [q_0, \lambda, F{*}T] & \vdash \\
[q_0, \lambda, T] & & &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a}+\mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a}+\mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a}+\mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a}+\mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a}+\mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a}+\mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] & \vdash \\
[q_0, \lambda,)E(*T] & \vdash & [q_0, \lambda, F{*}T] & \vdash \\
[q_0, \lambda, T] & \vdash & [q_0, \lambda, E] &
\end{array}
$$

PDA Ascendente para las Expresiones aritméticas

Ejemplo de uso

El PDA $Asc(G)$ acepta $\mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a})$ con las transiciones

$$
\begin{array}{llll}
[q_0, \mathbf{a} * (\mathbf{a} + \mathbf{a}), \lambda] & \vdash & & \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), \mathbf{a}] & \vdash & [q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), F] & \vdash \\
[q_0, *(\mathbf{a} + \mathbf{a}), T] & \vdash & [q_0, (\mathbf{a} + \mathbf{a}), *T] & \vdash \\
[q_0, \mathbf{a} + \mathbf{a}), (*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), \mathbf{a}(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), F(*T] & \vdash & [q_0, +\mathbf{a}), T(*T] & \vdash \\
[q_0, +\mathbf{a}), E(*T] & \vdash & [q_0, \mathbf{a}), +E(*T] & \vdash \\
[q_0,), \mathbf{a}{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), F{+}E(*T] & \vdash \\
[q_0,), T{+}E(*T] & \vdash & [q_0,), E(*T] & \vdash \\
[q_0, \lambda,)E(*T] & \vdash & [q_0, \lambda, F{*}T] & \vdash \\
[q_0, \lambda, T] & \vdash & [q_0, \lambda, E] & \\
 & \vdash & [q_1, \lambda, \lambda] \ \surd &
\end{array}
$$

Son equivalentes

$$L(Asc(G)) = L(G)$$

Hay que probar la igualdad de ambos conjuntos

- Toda palabra aceptada por $Asc(G)$ es derivable en G

$$L(Asc(G)) \subseteq L(G)$$

- Toda palabra derivable en G es aceptada por $Asc(G)$

$$L(G) \subseteq L(Asc(G))$$

Observaciones

- En relación a $Desc(G)$
  - Las transiciones modelan una derivación más izquierda.
  - La pila se usa para contener formas sentenciales más izquierdas.
  - Cada aplicación de una regla del tipo (2) corresponde a un paso en la derivación más izquierda.
  - El árbol de derivación se construye de arriba hacia abajo.

Observaciones

- En relación a $Desc(G)$
  - Las transiciones modelan una derivación más izquierda.
  - La pila se usa para contener formas sentenciales más izquierdas.
  - Cada aplicación de una regla del tipo (2) corresponde a un paso en la derivación más izquierda.
  - El árbol de derivación se construye de arriba hacia abajo.
- En relación a $Asc(G)$
  - Las transiciones modelan una derivación más derecha, pero con los pasos de derivación en orden inverso.
  - La pila se usa para contener formas sentenciales más derechas, pero con los símbolos en orden inverso.
  - Cada aplicación de una regla del tipo (2) o (3) corresponde a un paso en la derivación más derecha.
  - El árbol de derivación se construye de abajo hacia arriba.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Observaciones

- Para nuestro ejemplo de expresiones aritméticas, ¿es casualidad que las máquinas acepten en la misma cantidad de transiciones?
- Para $Asc(G)$ hay un par de lemas similares a los de $Desc(G)$: uno relaciona transiciones del PDA con formas sentenciales *invertidas*, y el otro relaciona formas sentenciales con transiciones del PDA. ¿Puede deducirlos?

Bibliografía

- [*Sudkamp*]
  - Repasen los conceptos que consideren convenientes.
  - Secciones 3.1 a 3.5 (Gramáticas y misceláneos).
  - Secciones 7.1 a 7.3 (Equivalencia CFG a PDA basada en FNG).
- **Grune y Jacobs**
  Parsing Techniques – A Practical Guide
  Es un libro dedicado a técnicas generales de reconocedores para cualquier tipo de gramáticas con diversidad de técnicas. Puede que encuentren una edición vieja en PDF si buscan lo suficiente.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR